Задачи на принцип уравнивания

$f_i(t)$ возр. и непр. $i=1,\dots,n$ $\quad M_0=\{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ \underbrace{x_i \geq 0}_{i=\overline{1,n}}\}$

$$\max_{x\in M_0} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i) = \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) \qquad f_1(0)\le f_2(0)\le\dots\le f_n(0)$$

необх. и достаточное условие $\exists\, 1\le k\le n$:

$$\begin{cases} f_1(x_1^0)=\dots=f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0) \\ x_{k+1}^0=\dots=x_n^0=0 \end{cases}$$

Алгоритм: $\quad f_i(x_i^0)=C,\ i=\overline{1,k} \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^0 = A, \quad k=n, n-1,\dots$

$C< f_{k+1}(0)$. условие оптимальности

Если $f_1(0)\geq f_2(0)\geq \dots \geq f_n(0)$, то условие: $\exists\, 1\le k\le n$

$f_{k-1}(0) > f_k(x_k^0)= \dots = f_n(x_n^0),\ x_1^0=\dots=x_{k-1}^0=0,$

$f_i(t)$ - убывающие и непр. смысл $f_i(t)$ - величина остаточного ущерба при вложении ресурса t

$$\min_{x \in M_0} \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$$

$f_1(0) \geq f_2(0) \geq \dots \geq f_n(0)$

$$\begin{cases} f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) > f_{k+1}(0) \\ x_{k+1}^0 = \dots = x_n^0 = 0 \end{cases}$$

Если $f_1(0) \le f_2(0) \le \dots \le f_n(0)$

$$\begin{cases} f_k(x_k^0) = \dots = f_n(x_n^0) \\ x_1^0 = \dots = x_{k-1}^0 = 0 \end{cases}$$

Во всех задачах, если $f_1(0) = \dots = f_n(0)$, то $k = n$

Дискретные задачи $M_0' = \{x \in M_0 \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1,n}$

$$\max_{x \in M_0'} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$$

$f_i(t)$ - возр. ф-ии целого аргумента

Дост. условие оптимальности

$$x_i^* > 0 \Rightarrow f_i(x_i^* - 1) \le \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$$

В алгоритме, если $x_j^{(k)} > 0$ и $f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)})$

то $x^{(k+1)}$: $x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_e^{(k)} + 1, & i = e \\ x_i^{(k)}, & i \ne j, e \end{cases}$ $= f_e(x_e^{(k)})$

$$\min_{x \in M_0'} \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$$

$f_i(t)$ - убывают

Условие оптимальности

$$x_j^* > 0 \qquad f_j(x_j^* - 1) \geq \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$$